CORRIERE DELLA SERA laLettura
Dir. Resp.: Luciano Fontana

I NUMERI: PENSIERO E AZIONE

La loro varietà è evidente: interi, razionali e irrazionali, complessi, transfiniti, euclidei e non, computabili e non, algebrici, trascendenti. E però non sono affatto entità inerti che si comportano come vogliamo, sono portatori essi stessi di idee nuove e imprevedibili

di PAOLO ZELLINI

La varietà dei numeri possibili è evidente: numeri interi, razionali, irrazionali, complessi, transfiniti, euclidei, non euclidei, algebrici, trascendenti, computabili, non computabili. Ma che cosa è un numero? E in base a quale criterio possiamo considerare alla stregua di numeri entità di natura diversa, e pretendere poi di assegnare a tutti lo stesso grado di esistenza? Non si potrebbe pensare che un numero esista diversamente da un altro? Talvolta simili domande ingenue sono le più difficili e imbarazzanti.

Il numero ha innanzitutto una funzione metrica, per cui diciamo ad esempio, in un modo che ci appare solidamente ancorato alla realtà che conosciamo, che una certa grandezza, assunta come unità di misura, è contenuta in un'altra un certo *numero* di volte. Ma solo alcuni numeri sembrano poter rivendicare un simile grado di evidenza o di relativa materialità accessibile alla nostra intuizione. Ci limitiamo a parlare di numeri, ma con l'intesa che le loro proprietà, per un verso più immediatamente intuitive, potrebbero estendersi a entità più generali e astratte.

Un nominalista risolverebbe alla radice le questioni che riguardano l'esistenza dei numeri e di altri enti matematici: si impegnerebbe, certo, a dichiarare che un numero esiste, ma con l'intesa che l'esistenza reale di quel numero non dipende affatto dal linguaggio che usiamo per convalidarla. Un vecchio adagio dice che affermare che un numero esiste non ci assicura affatto che quel numero esiste davvero nel mondo reale, ma soltanto che una data asserzione ne stabilisce l'esistenza. È una questione *de dicto*, non *de re*.

Tuttavia la visione nominalistica si espone a possibili obiezioni, e potrebbe essere incauto negare a priori a certe entità matematiche un qualche grado di realtà effettiva, o assegnare loro, sempre e comunque, un carattere di pura astrazione. Se per un verso quelle entità ci possono apparire come libere costruzioni della nostra mente, per un altro si rivelano anche nozioni applicabili alle scienze della natura, e quindi a una realtà sperimentale e sperimentabile. Ma la realtà dei numeri dipende soltanto dall'eventualità che essi si dimostrino utili o perfino necessari per descrivere il mondo reale?

Quando il giovane Törless, nel celebre racconto di Robert Musil, si chiede con un certo allarme «com'è la faccenda dei numeri immaginari», il professor Beineberg gli risponde rassicurante che la questione non è poi così difficile: la radice quadrata di meno uno è semplicemente l'unità con cui si deve calcolare. L'osservazione di Törless per cui quell'unità «non esiste», perché ogni numero elevato al quadrato dà una quantità positiva, sembrerebbe non avere alcun senso in un calcolo esteso a numeri irrazionali, immaginari o infiniti come quello di cui un matematico si serve di solito, senza porsi troppe domande. In fondo si tratta solo di un accordo prestabilito su quali regole adottare. Come spiega Beineberg al suo giovane allievo, i numeri irrazionali suscitano domande, forse anche più enigmatiche, analoghe a quelle poste dagli immaginari, perché sollevano il cruciale interrogativo sulla natura dell'infinito, dibattuto da millenni in ambito sia scientifico sia filosofico.

Un numero irrazionale è «una divisione che non finisce mai, una frazione il cui valore non verrà fuori mai e poi mai, anche se calcoli per cent'anni!», eppure i matematici hanno trovato da secoli il modo di operare con i numeri irrazionali all'incirca come si opera con le frazioni, mediante addizioni, moltiplicazioni e divisioni che estendono formalmente il calcolo aritmetico ordinario. Georg Cantor aveva denotato con semplici simboli intere successioni infinite di frazioni atte a definire un numero irrazionale, e aveva dimostrato che con questi simboli si può operare come si è soliti pro-

Dati rilevati dagli Enti certificatori o autocertificati
Tiratura: n.d.
Diffusione: n.d.
Lettori Ed. 2021: 1.730.000
Settimanale - Ed. nazionale
CORRIERE DELLA SERA laLettura
Dir. Resp.: Luciano Fontana
03-APR-2022
da pag. 30 /
foglio 2 / 3
www.datastampa.it

cedere con i numeri dell'aritmetica elementare. Gottlob Frege si dichiarava pienamente d'accordo con Cantor, respingendo la pretesa di considerare come *effettivi* soltanto i numeri interi finiti: «Nelle nostre ricerche possiamo far uso, senza il benché minimo timore, di qualunque nome o segno che sia stato introdotto con metodo logicamente inoppugnabile».

È dunque comprensibile che, per stare ai contributi di Cantor e di Frege, il campo numerico formato dai numeri razionali e dai numeri irrazionali abbia potuto assumere il nome di campo *reale*, un nome che tradisce l'intenzione di estendere a numeri con infinite cifre lo statuto ontologico dei numeri interi finiti.

L'osservazione del musiliano professor Beineberg, per cui i numeri immaginari sono semplicemente entità con cui calcolare secondo regole prestabilite, sembra trovare riscontro in un modo discutibile, ma non così insolito, di definire la stessa matematica come scienza fine a sé stessa, preoccupata soltanto della propria coerenza. Eugene P. Wigner, premio Nobel per la Fisica nel 1963 e autore nel 1960 di un celebre articolo intitolato *L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali* (Adelphi, 2017; a cura di Mauro Sellitto) lo esprimeva con un laconico giro di frase: «Direi che la matematica è la scienza delle operazioni ingegnose con regole e concetti inventati apposta a tale scopo [di essere coerente]». Lo stesso Wigner avvertiva che la sua definizione era mutuata da un'altra, già proposta in passato per la filosofia: «Qualcuno una volta ha detto che la filosofia è l'uso scorretto di una terminologia inventata apposta a tale scopo».

In un'affermazione del genere dovette realmente imbattersi il grande studioso di mistica ebraica Gershom Scholem, durante la sua formazione matematica a Berlino tra il 1915 e il 1916. È lo stesso Scholem, infatti, a raccontare che Hermann A. Schwarz, il celebre matematico già allievo di Karl Weierstrass, introduceva il suo corso con un'analoga dichiarazione a proposito, appunto, della filosofia: «La filosofia è l'abuso sistematico di una terminologia inventata appositamente per questo scopo». Probabilmente Schwarz era ben lontano dal sospettare che qualcuno avrebbe applicato lo stesso giro di frase alla matematica che lui stesso si accingeva a insegnare.

Per quanto insoddisfacente potesse sembrare a Törless la spiegazione del suo professore Beineberg, essa trovava una giustificazione finale e irrefutabile nella tesi che i principî della matematica sono «inerenti alla natura del pensiero e determinanti ogni cosa, benché essi stessi non possano venire così senz'altro compresi». Per avvalorare questa tesi Beineberg mostrava al giovane Törless un libro di Kant, a riprova del fatto che noi pensiamo i numeri in conformità a una regola dell'immaginazione o alle scaltrezze di un'arte intellettuale che — come spiegava appunto Kant —, è difficile da svelare e rimane nascosta nelle profondità dell'anima umana.

Ma possiamo davvero essere certi che tutti i numeri siano il prodotto di un'arte che ci appartiene senza restrizioni (pur non avendone noi alcuna conoscenza chiara)? Un'arte in cui sarebbero custodite le leggi a priori che dettano il nostro modo di definirli? Non possiamo certo escluderlo. Resta tuttavia il fatto che operiamo per mezzo di molte differenti specie di numeri, che le regole per concepirli correttamente dipendono dai contesti, e che spesso sono gli stessi numeri, per una loro intrinseca e singolare intenzionalità, a suggerirci un determinato modo di pensarli, e non un altro. Sarebbe poi difficile sostenere che i numeri esistono tutti alla stessa stregua, solo perché, come sosteneva Frege, sono definiti senza contraddizioni. Le regole con cui pensiamo i numeri riflettono una realtà che per alcuni è puramente mentale, per altri è esterna e indipendente da noi, e ci obbliga a osservarla o a scoprirla secondo i casi e le necessità imposte di volta in volta da circostanze relativamente empiriche. Anche ammettendo di possedere leggi a priori per pensare i numeri, è difficile cancellare l'impressione che le loro proprietà siano velate o nascoste, e difficili da formulare nel modo più utile e adeguato per ambiti teorici ed empirici diversamente interessati o coinvolti.

Nel campo *reale*, controparte aritmetica di un'idea intuitiva di continuo, troviamo formalmente risolte questioni complesse sulla natura dei numeri che risalgono alla matematica greca. Non si esagera dicendo che la loro definizione, nel XIX secolo, è stata una delle più importanti conquiste della scienza esatta. Eppure nel 1970 George E. Forsythe, uno dei padri della recente scienza del calcolo, ne parlava così: «Il sistema dei numeri a cui si è dato il nome infelice di *numeri reali* è uno dei trionfi della mente umana. Esso è la base del *calculus* e dell'analisi superiore, fino al punto da potere farci dimenticare come sia impossibile avere a che fare con i numeri reali nel mondo reale dei calcolatori finiti. Eppure, per quanto il sistema dei numeri reali semplifichi l'analisi, il calcolo pratico (*practical computing*) deve fare a meno di essi».

Qui la parola «pratico», frequente peraltro in tutta la letteratura matematica del Novecento, e soprattutto — come si può immaginare — nelle scienze computazionali e applicate, non deve trarre in inganno. Non dobbiamo necessariamente distinguere tra una matematica pura, che ci spiega ciò che è vero, da un calcolo pratico che ci rivela ciò che è utile. Tra i due punti di vista c'è un unico pensiero matematico che si muove, per così dire, tra terra e cielo, dal concreto all'astratto e anche, viceversa, dall'astratto al concreto. Come era solito osservare Andrej A. Markov Jr., che aveva studiato a fondo i concetti di algoritmo e di effettività, nella matematica troviamo diversi filoni di pensiero, teorici e applicativi, ma un criterio di massima deve essere rispettato: le astrazioni non dovrebbero essere perseguite solo per sé stesse, senza una qualche «discesa sulla terra». I numeri di macchina con cui opera un calcolatore e di cui, come avvertiva Forsythe, dobbiamo servirci al posto dei numeri reali, formano un insieme infinitamente meno denso e strutturato del campo reale. Ad essi si può attribuire quell'*effettività* che possiedono pure gli algoritmi, e che Markov definiva informalmente come la capacità di *ottenere un risultato concreto in un numero finito di passi*. Lo statuto ontologico dei numeri di macchina dipende allora dalla loro esistenza fisica in un processo eseguito da un calcolatore in un certo tempo e in un certo spazio di memoria. E questa circostanza non c'entra nulla, di per sé, con la loro possibile applicazione al mondo reale. Per certi versi questi numeri *esistono* quali entità di natura ibrida, tra l'astratto e il concreto, per il solo fatto che sono calcolati con strumenti automatici.

Oggi sarebbe difficile sostenere che i numeri esistono tutti allo stesso modo. Nel ripensare i numeri — come ha proposto László Lovász — come *effettive* procedure di calcolo nello spazio e nel tempo, dovremmo anche poter estendere lo stesso concetto di effettività, e non limitarne il significato, come è stato fatto inizialmente, a un concetto astratto di computabilità teorica. Oggi il grande impatto degli algoritmi sulla scienza, sulla tecnologia, sulle scienze economiche, statistiche e sociali, dipende pure da questo loro coinvolgimento nella nostra ineludibile speranza di poter definire con chiarezza ciò che è reale.

Dati rilevati dagli Enti certificatori o autocertificati
Tiratura: n.d.
Diffusione: n.d.
Lettori Ed. 2021: 1.730.000
Settimanale - Ed. nazionale

CORRIERE DELLA SERA laLettura

Dir. Resp.: Luciano Fontana

03-APR-2022
da pag. 30 /
foglio 3 / 3
www.datastampa.it

Ma allora, per essere davvero coerenti, occorre riferire ciò che consideriamo davvero effettivo o reale a una pura *efficienza* di calcolo. Come potremmo considerare realmente esistente un numero computabile solo in linea di principio, senza disporre di mezzi concreti per calcolarlo senza errori e in un tempo accettabile? La scienza del calcolo continua oggi a porsi, in diverse forme, questa stessa domanda, ma il problema di fondo, al di là degli strumenti matematici per chiarirla, è di natura prettamente filosofica: in base a ciò che sappiamo oggi, che cosa è reale e che cosa non lo è? Che cosa siamo disposti a iscrivere in un mondo di cose effettivamente esistenti?

Giuseppe Peano, il matematico italiano a cui si deve una celebre definizione logico-formale di numero, era altrettanto consapevole che i numeri si possono considerare da diverse visuali, e non deve sorprendere, allora, se egli dichiarava che «lo scopo della matematica è di determinare il valore numerico delle incognite che si presentano nei problemi pratici», e che tutti i grandi matematici svilupparono «le loro mirabili teorie fino al calcolo delle cifre decimali necessarie». Ma la constatazione di Peano non è priva di conseguenze. I numeri non sono affatto entità inerti che si comportano come vogliamo. Sono invece atomi di pensiero resistenti, aggressivi, portatori essi stessi di idee nuove e imprevedibili. Sono anche punti di transito dall'invisibile al visibile, attraverso i quali la realtà può manifestarsi in tutte le sue varie prospettive: dall'estrema materialità del calcolo alle visioni più astratte e idealistiche. È tra queste due stesse prospettive, in matematica come pure in altri ambiti della conoscenza e dell'esistenza, che finisce per doversi sempre organizzare il nostro pensiero.

L'autore

Laureato in Matematica alla Sapienza di Roma, Paolo Zellini (Trieste, 1946) nei suoi saggi affronta l'evoluzione del pensiero matematico attraverso il concetto di infinito e l'approfondimento della nozione di numero in una prospettiva che mette in gioco la storia del pensiero non solo occidentale. Ha dichiarato di essere stato ispirato in queste ricerche dall'opera di Elémire Zolla. Accanto ai grandi matematici, nei suoi libri incontriamo Robert Musil e Simone Weil, San Tommaso e Boezio, Hermann Broch e Pavel Florenskij. La riflessione abbraccia la scoperta pitagorica dei numeri irrazionali, le ardite teorizzazioni medievali, la furia mistica di Giordano Bruno e di Nicola Cusano, le innovazioni scandalose di René Descartes e di Gottfried Wilhelm Leibniz, l'abbagliante «paradiso» di Georg Cantor e le suggestioni dell'«infinito aperto». Ha pubblicato tra gli altri, per Adelphi, *Breve storia dell'infinito* (1993), *La matematica degli dèi e gli algoritmi degli uomini* (2016), *La dittatura del calcolo* (2018).